Algebraische Differentialgleichungen

JONATHAN PIRNAY (MN 1740960)

Vortrag im Seminar über Algebra am 5.7.2016

1. ERINNERUNG

i.) Eine Derivation D auf einem kommutativen Ring mit Eins ist ein Gruppenhomomorphismus $D : A \to A$, der die Leibnizregel erfüllt, d.h. $\forall a, b \in A$ gilt

$$D(ab) = aD(b) + bD(a)$$

Ein solches Paar (A, D) wird *differentieller Ring* genannt.

ii.) Ein *differentieller Homomorphismus* $f : (A, D_A) \to (B, D_B)$ von differentiellen Ringen ist ein Ringhomomorphismus $f : A \to B$, der

$$f(D_A(a)) = D_B(f(a)) \text{ für alle } a \in A$$

erfüllt. Wir sagen dann, D_B *erweitert* D_A.

iii.) Ein *differentielles Ideal* ist ein Ideal $\mathfrak{a} \subset A$ in differentiellem Ring (A, D), für das $D(\mathfrak{a}) \subset \mathfrak{a}$ gilt.

Wir haben im vorherigen Vortrag gesehen, wie sich für ein differentielles Ideal $\mathfrak{a} \subset A$ die Derivation auf eindeutig kanonische Weise auf ${}^{A}/_{\mathfrak{a}}$ vererbt, und wie auf einem Integritätsring die Derivation auf den Quotientenkörper eindeutig erweitert wird. Wir wollen uns jetzt ansehen, wie wir die Derivation auf den Polynomring und auf endliche, separable Körpererweiterungen erweitern können, und welche Wahlen wir dabei treffen können.

2. ERWEITERUNGEN DER DERIVATION

2.1. **Satz.** Sei (A, D) differentieller Ring und $g \in A[X]$. Dann existiert eine eindeutige Derivation D_g auf $A[X]$, so dass gilt:

i.) $D_g(X) = g$

ii.) Die kanonische Einbettung $A \hookrightarrow A[X]$ ist ein ein differentieller Morphismus $(A, D) \to (A[X], D_g)$.

Beweis:

i.) EINDEUTIGKEIT: Setze $B := A[X]$ und sei $f(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in B$. Schreibe $f^D \in B$ für das Polynom, das entsteht, wenn man D auf die Koeffizienten von f anwendet. Sei D_B Derivation auf B, die D wie in ii.) erweitert. Es gilt:

$$\begin{aligned} D_B(f) &= \sum_{k=0}^{n} D_B(a_k X^k) = \sum_{k=0}^{n} (D(a_k)X^k + a_k D_B(X^k)) \\ &\underset{[\text{CL, 6.1.4}]}{=} \sum_{k=0}^{n} D(a_k)X^k + (\sum_{k=1}^{n} k a_k X^{k-1}) D_B(X) \qquad (1) \\ &= f^D + D_B(X) f' \quad (f' = \text{formale Ableitung}) \end{aligned}$$

(1) zeigt, dass ein solches D_B eindeutig durch $D_B(X)$ bestimmt ist, und es folgt Eindeutigkeit in i.).

Existenz: Für $g \in A[X]$ definiere D_g durch (1) mit $D_g(X) := g$. D_g ist Gruppenhomomorphismus, und man sieht leicht ein, dass D_g die Leibnizregel erfüllt, wenn man beachtet, dass für zwei Polynome $f := \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ und $g := \sum_{k=0}^{m} a_k X^k \in A[X]$ gilt, dass

$$f \cdot g = \sum_{k=0}^{m+n} c_k X^k \text{ mit } c_k = \sum_{i+j=k} a_i b_j$$

ii.) Klar, denn in (1) gilt $D_B(a) = a^D + D_B(X)a' = D(a)\ \forall a \in A$.

$\square$

2.2. **Satz.** Sei (K, D) differentieller Körper und sei L/K endliche, separable Körpererweiterung. Dann existiert eine eindeutige Derivation D_L auf L, die mit D auf K übereinstimmt.

Beweis: Wähle nach Satz von primitivem Element ein $\alpha \in L$ mit $L = K(\alpha)$ und sei $f(X) := X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots a_0 \in K[X]$ sein Minimalpolynom. Es gilt $L \cong {}^{K[X]}\!/\!_{(f)}$. [Alg, 15.10]

Eindeutigkeit: Sei D_L Derivation auf L, die D erweitert, dann folgt:

$$\begin{aligned} 0 = D_L(0) &= D_L(f(\alpha)) \\ &\underset{\text{analog zu (1)}}{=} f^D(\alpha) + f'(\alpha)D_L(\alpha) \end{aligned}$$

Da f separabel, ist $f' \neq 0$ [Alg, 17.2][1], und da $\deg(f') < \deg(f)$, muss $f'(\alpha) \neq 0$ gelten. $\implies D_L(\alpha) = \frac{-f^D(\alpha)}{f'(\alpha)}$ und es folgt Eindeutigkeit.[2]

Existenz: Wir wollen [CL, 6.2.3] auf $K[X]$ und das Ideal (f) anwenden. Dafür müssen wir eine geeignete Derivation auf $K[X]$ finden, so dass (f) differentielles Ideal wird. Es existieren $u, v \in K[X]$ mit $uf + vf' = 1$.[3] Mit 2.1 erhalte Derivation $\tilde{D} : K[X] \to K[X]$ mit $\tilde{D}(X) = -vf^D$. (1) liefert:

$$\begin{aligned} \tilde{D}(f) &= f^D + \tilde{D}(X)f' \\ &= f^D - vf^D f' = f^D(1 - vf') = f^D(uf) \\ &= (f^D u)f \in (f) \end{aligned}$$

[1]Man überlegt sich auch leicht, dass gilt: β ist mehrfache Nullstelle von $f \iff f(\beta) = 0 \wedge f'(\beta) = 0$. Ein irreduzibles, separables Polynom besitzt nur einfache Nullstellen in einem Zerfällungskörper

[2]In der Tat, denn D_L erweitert D, und da $L = K(\alpha)$, ist D_L eindeutig durch $D_L(\alpha)$ bestimmt.

[3]Sei $g := \mathrm{ggT}(f, f')$, d.h. $f = gh \wedge f' = g\tilde{h}$ für geeignete $h, \tilde{h} \in K[X] \setminus \{0\}$. Da f irreduzibel, gilt $g \in K^\times$ oder $h \in K^\times$. Da $\deg(f') < \deg(f)$, ist $g \in K^\times$. Erweiterter euklidischer Algorithmus liefert dann $u, v \in K[X]$ mit $g = uf + vf' \implies \frac{1}{g}u$ und $\frac{1}{g}v$ sind dann die gesuchten Polynome.

Insbesondere folgt $\forall g \in K[X] : \tilde{D}(gf) = g\tilde{D}(f) + f\tilde{D}(g) \in (f)$. Also ist (f) differentielles Ideal. [CL, 6.2.3] liefert dann Derivation auf $K[X]/(f) \cong L$, die mit differentiellem Homomorphismus $K \xrightarrow{2.1} K[X] \xrightarrow{[CL,\ 6.2.3]} K[X]/(f)$ Erweiterung von D ist. □

3. Algebraische Differentialgleichungen

3.1. **Definition.** Sei (K, D) differentieller Körper. Eine *linear homogene Differentialgleichung der Ordnung* n ist eine Gleichung der Form

$$D^n(f) + a_{n-1}D^{n-1}(f) + \cdots + a_0 f = 0, \tag{2}$$

wobei $a_0, \cdots, a_{n-1} \in K$ und $f \in K$ die *Unbekannte* bezeichnet.

3.2. **Bemerkung.**

i.) (Konvention) In diesem Vortrag sind alle Differentialgleichungen (DGL) von der Form wie in (2). Ferner setze $f' := D(f)$ für ein $f \in (K, D)$.

ii.) Für $n \in \mathbb{N}$ und $Y = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix} \in K^n$ setze $Y' := \begin{pmatrix} f_1' \\ \vdots \\ f_n' \end{pmatrix}$

iii.) Eine DGL wie in (2) lässt sich als Gleichung der Form

$$Y' = AY \text{ mit } A \in M_n(K) \text{ und Unbekannten } Y \in K^n \tag{3}$$

schreiben. Setze dafür $Y := \begin{pmatrix} f \\ f' \\ \vdots \\ f^{(n-1)} \end{pmatrix}$ und erhalte

$$\begin{aligned} Y' = \begin{pmatrix} f' \\ f'' \\ \vdots \\ f^{(n)} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} f' \\ \vdots \\ f^{(n-1)} \\ -a_{n-1}f^{(n-1)} - \cdots - a_0 f \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & -a_{n-1} \end{pmatrix} Y \end{aligned}$$

Insbesondere betrachten wir DGL der Ordnung n in der Form wie in (3).

3.3. **Satz.** Sei (K, D) differentieller Körper mit Konstantenkörper C, $n \in \mathbb{N}$. Dann ist zu DGL $Y' = AY,\ A \in M_n(K)$ die Lösungsmenge $V := \{Y \in K^n \mid Y' = AY\}$ ein C-Vektorraum mit $\dim_C(V) \leq n$.

Beweis: Die Derivation D ist C-linear (denn für $a \in C$ und $f \in K$ gilt $D(af) = aD(f) + f\underbrace{D(a)}_{=0} = aD(f)$).

Somit ist die Abbildung $\varphi : K^n \to K^n, \varphi(Y) = Y' - AY$ C-linear und damit $V = \ker(\varphi)$ ein C-Vektorraum. Zeige, dass $\dim_C(V) \leq n$. Dafür genügt es zu zeigen, dass beliebige $n+1$ Elemente in V linear abhängig über C sind. Sie sind es offenbar über K (denn $\dim_K(K^n) = n$). Mit folgendem Lemma folgt die Behauptung. □

3.4. **Lemma.** Sei (K, D) differentieller Körper mit Konstantenkörper C. Seien $Y_1, \cdots, Y_m$ Lösungen einer DGL $Y' = AY$ für $A \in M_n(K)$. Dann gilt

$Y_1, \ldots, Y_m$ linear unabhängig über $C \implies Y_1, \ldots, Y_m$ linear unabhängig über K

Beweis: Induktion über m. Für $m = 1$ ist alles klar. Induktionsschritt von $m-1$ nach m. Habe $Y_1, \ldots, Y_m$ linear unabhängig über C. Nach Induktionsvoraussetzung sind $Y_1, \ldots, Y_{m-1}$ linear unabhängig über K. Betrachte nun $a_1Y_1 + \cdots + a_mY_m = 0$ für $a_1, \ldots, a_m \in K$. Gilt $a_m = 0$, so ist nichts zu zeigen. Angenommen, $a_m \neq 0$, d.h. wir nehmen an, dass $a_m = 1$ (multipliziere Gleichung sonst mit $\frac{1}{a_m}$). Differenzieren der Gleichung liefert

$$(a_1'Y_1 + a_1Y') + \cdots + (a_{m-1}'Y_{m-1} + a_{m-1}Y_{m-1}') + Y_m' = 0,$$

also

$$(a_1'Y_1 + \cdots + a_{m-1}'Y_{m-1}) + \underbrace{A(\overbrace{a_1Y_1 + \cdots + a_{m-1}Y_{m-1} + Y_m}^{=0})}_{=a_1Y_1'+\cdots+a_{m-1}Y_{m-1}',\text{ denn } Y_i'=AY_i} = 0,$$

somit

$$a_1'Y_1 + \cdots + a_{m-1}'Y_{m-1} = 0$$

Nach Induktionsvoraussetzung gilt $a_1' = \cdots = a_{m-1}' = 0$, und damit $a_1, \ldots, a_{m-1} \in C$. Aber dann beschreibt $a_1Y + \cdots + a_{m-1}Y_{m-1} + Y_m = 0$ lineare Abhängigkeit über C, im Widerspruch zur Voraussetzung. □

3.5. **Definition (Wronski-Determinante).** Sei (K, D) differentieller Körper. Definiere die *Wronski-Determinante* $W(f_1, \ldots, f_n)$ von Elementen $f_1, \ldots, f_n \in K$ als

$$W(f_1, \ldots, f_n) = \det \begin{pmatrix} f_1 & f_2 & \ldots & f_n \\ f_1' & f_2' & \ldots & f_n' \\ \vdots & & & \vdots \\ f_1^{(n-1)} & f_2^{(n-1)} & \ldots & f_n^{(n-1)} \end{pmatrix}$$

3.6. **Satz.** Sei (K, D) differentieller Körper, sowie $f_1, \ldots, f_n \in K$. Dann gilt:

$$f_1, \ldots, f_n \text{ linear abhängig über } C \iff W(f_1, \ldots, f_n) = 0$$

Beweis: „$\Rightarrow$": Seien $f_1, \ldots, f_n$ linear abhängig über C. Nach 3.3 ist die Derivation C-linear, somit sind die Spalten der Wronski-Matrix linear abhängig über C, also $W(f_1, \ldots, f_n) = 0$.

„$\Leftarrow$": (ähnlich wie 3.4) Induktion über n. Der Fall $n = 1$ ist klar. Induktionsschritt von $n-1$ nach n: Habe $W(f_1, \ldots, f_n) = 0$. Gilt $W(f_2, \ldots, f_n) = 0$, so folgt nach Induktionsvoraussetzung, dass $f_2, \ldots, f_n$ linear abhängig über C sind (insbesondere sind dann natürlich $f_1, \ldots, f_n$ linear abhängig). Gelte daher $W(f_2, \ldots, f_n) \neq 0$. Da $W(f_1, \ldots, f_n) = 0$, sind die Spalten der Wronski-Matrix linear abhängig über K, d.h. es existieren $a_1, \ldots, a_n \in K$ nicht alle Null mit

$$a_1 f_1^{(j)} + a_2 f_2^{(j)} + \cdots + a_n f_n^{(j)} = 0 \ \forall j \in \{0, \ldots, n-1\} \tag{4}$$

Da nach Annahme $W(f_2, \ldots, f_n) \neq 0$, gilt $a_1 \neq 0$ und wir können wieder annehmen, dass $a_1 = 1$. Differenzieren von (4) liefert $\forall j \in \{0, \ldots, n-2\}$:

$$f_1^{(j+1)} + (a_2 f_2^{(j+1)} + a_2' f_2^{(j)}) + \cdots + (a_n f_n^{(j+1)} + a_n' f_n^{(j)}) = 0,$$

also

$$a_2' f_2^{(j)} + \cdots + a_n' f_n^{(j)} = 0 \ \forall j \in \{0, \ldots, n-2\}$$

Da $W(f_2, \ldots, f_n) \neq 0$, muss also bereits $a_2' = \cdots = a_n' = 0$ und somit $a_2, \ldots, a_n \in C$ gelten. Also sind $f_1, \ldots, f_n$ linear abhängig über C. $\square$

Literatur

[CL] Chambert-Loir, Antoine. A field guide to algebra. Springer, New York 2005 `http://dx.doi.org/10.1007/b138364`

[Alg] Künnemann, Klaus. Vorlesung „Algebra" im WS 15/16, Universität Regensburg